Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2019, Extraordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx+(k+1)y & +z=0 \\ -x+ky & -z=0 \\ (k-1)x-y & =0 \end{cases}$ **se pide:**

a) **Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.**
b) **Resolver el sistema para $k=-1$.**

Solución:

a) **Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.**

Es un sistema homogéneo, por lo que siempre será compatible ($\mathrm{Rg}(A)=\mathrm{Rg}(A^*)$). La discusión se centra en si es Compatible Determinado (S.C.D., única solución $x=y=z=0$) o Compatible Indeterminado (S.C.I., infinitas soluciones). Esto depende del rango de la matriz de coeficientes A.

$$A=\begin{pmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= k^2-(k^2-1^2)+1-k(k-1)-k+k+1=-2k^2+2 \end{aligned}$$

Igualamos el determinante a cero:

$$-2k^2+2=0 \implies k^2=1$$

Los valores críticos son $k_1=+1$ y $k_2=-1$.

Caso 1: Si $k\neq 1$ y **$k\neq -1$.** En este caso, $|A|\neq 0$, por lo tanto, $\mathrm{Rg}(A)=3$. Como es un sistema homogéneo, la única solución es la trivial $x=y=z=0$. El sistema es Compatible Determinado (S.C.D.).

Caso 2: Si $k=1$:
En este caso, $|A|=0$, por lo tanto, $\mathrm{Rg}(A)<3$. Buscamos un menor de orden 2 no nulo. Por ejemplo, para $k=1$:
$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1-(-2)=3\neq 0.$
Si $\mathrm{Rg}(A)=2$, como el sistema es homogéneo, $\mathrm{Rg}(A)=\mathrm{Rg}(A^*)=2<3$ (nº incógnitas). El sistema es Compatible Indeterminado (S.C.I.) con $3-2=1$ grado de libertad.

Caso 3: Si $k=-1$:
En este caso, $|A|=0$, por lo tanto, $\mathrm{Rg}(A)<3$. Buscamos un menor de orden 2 no nulo. Por ejemplo, para $k=-1$:
$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=1-0=3\neq 0.$
Si $\mathrm{Rg}(A)=2$, como el sistema es homogéneo, $\mathrm{Rg}(A)=\mathrm{Rg}(A^*)=2<3$ (nº incógnitas). El sistema es Compatible Indeterminado (S.C.I.) con $3-2=1$ grado de libertad.

Si $k\neq\pm1$: S.C.D. (Solución única trivial $x=y=z=0$)
Si $k=\pm1$: S.C.I. (Infinitas soluciones, 1 grado de libertad)

b) Resolver el sistema para $k = -1$.

Para $k = -1$, como -1, estamos en el Caso 3. El sistema es Compatible Indeterminado y tiene infinitas soluciones.
Reescribimos el sistema:

$$\begin{cases} -x + z = 0, \\ -x - y - z = 0, \\ -2x - y = 0. \end{cases}$$

Dando a la Z el valor del parámetro λ:
$-x + z = 0 \quad \rightarrow \quad -x + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad x = \lambda$
$-2x - y = 0 \quad \rightarrow \quad -2\lambda - y = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2\lambda$

$$\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k = -1, x = \lambda, y = -2\lambda, z = \lambda}.}$$

Ejercicio 2. Opción A. Análisis

a) **Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:** $\boldsymbol{f(1) = 1, f'(1) = 2, g(1) = 3}$
Dada $\boldsymbol{k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}}$**, calcule** $\boldsymbol{k'(1)}$. **Dada** $\boldsymbol{h(x) = f((x+1)^2)}$, **use la regla de la cadena para calcular** $\boldsymbol{h'(0)}$.

b) **Calcule la integral** $\boldsymbol{\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx}$. **(Se puede usar el cambio de variables t = sinx.)**

Solución:

a) **Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:** $\boldsymbol{f(1) = 1, f'(1) = 2, g(1) = 3}$
Dada $\boldsymbol{k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}}$**, calcule** $\boldsymbol{k'(1)}$. **Dada** $\boldsymbol{h(x) = f((x+1)^2)}$, **use la regla de la cadena para calcular** $\boldsymbol{h'(0)}$.

Cálculo de $k'(1)$:
Usamos la regla de la derivada de un cociente:

$$k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Evaluamos en $x = 1$:

$$k'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{[g(1)]^2}$$

Sustituimos los valores dados:

$$k'(1) = \frac{(2)(3) - (1)(4)}{[3]^2} = \frac{6-4}{9} = \frac{2}{9}.$$

Cálculo de $h'(0)$:
Usamos la regla de la cadena:

$$h'(x) = f'((x+1)^2) \cdot \frac{d}{dx}((x+1)^2)$$

$$h'(x) = f'((x+1)^2) \cdot 2(x+1)$$

Evaluamos en $x = 0$:

$$h'(0) = f'((0+1)^2) \cdot 2(0+1) = f'(1^2) \cdot 2(1) = f'(1) \cdot 2.$$

Sustituimos el valor dado $f'(1) = 2$:

$$h'(0) = 2 \cdot 2 = 4.$$

$$\boxed{\boldsymbol{k'(1) = \frac{2}{9}, \quad h'(0) = 4}}$$

b) **Calcule la integral** $\boldsymbol{\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx}$. **(Se puede usar el cambio de variables t = sinx.)**

La integral es $I = \int \sin^4(x)\cos^3(x)dx$. Reescribimos $\cos^3(x) = \cos^2(x)\cos(x) = (1 - \sin^2(x))\cos(x)$.

$$I = \int \sin^4(x)(1 - \sin^2(x))\cos(x)dx$$

Usamos el cambio de variable sugerido: $t = \sin(x)$. Entonces $dt = \cos(x)dx$. Sustituimos en la integral:

$$I = \int t^4(1-t^2)dt = \int (t^4 - t^6)dt$$

Integramos el polinomio en t:

$$I = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C$$

Deshacemos el cambio sustituyendo $t = \sin(x)$:

$$I = \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{7} + C.$$

$$\boxed{\boldsymbol{\int \sin^4(x)\cos^3(x)dx = \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{7} + C}}$$

Ejercicio 3. Opción A. Geometría

Dados los puntos $A(1,1,1), B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) **Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.**
b) **Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}$ y $\vec{AD}$ sean linealmente dependientes.**
c) **Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.**

Solución:

a) **Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.**

El plano π está determinado por el punto A y los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$\vec{AB} = B - A = (1-1, 3-1, -3-1) = (0, 2, -4).$$

$$\vec{AC} = C - A = (-3-1, -1-1, 1-1) = (-4, -2, 0).$$

Podemos usar vectores proporcionales para simplificar: $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{AB} = (0, 1, -2)$ y $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{AC} = (-2, -1, 0)$.
La ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(1(0) - (-2)(-1)) - (y-1)(0(0) - (-2)(-2)) + (z-1)(0(-1) - 1(-2)) = 0$$

$$(x-1)(0-2) - (y-1)(0-4) + (z-1)(0+2) = 0$$

$$-2(x-1) + 4(y-1) + 2(z-1) = 0$$

Dividimos por -2:

$$(x-1) - 2(y-1) - (z-1) = 0$$

$$x - 1 - 2y + 2 - z + 1 = 0$$

$$x - 2y - z + 2 = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv x - 2y - z + 2 = 0}}$$

b) **Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}$ y $\vec{AD}$ sean linealmente dependientes.**

Los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ son linealmente dependientes si y solo si los cuatro puntos A, B, C y D son coplanarios, es decir, si D pertenece al plano π determinado por A, B y C.
Necesitamos encontrar un punto $D(x, y, z)$ que satisfaga la ecuación del plano $x - 2y - z + 2 = 0$ y que sea distinto de A, B y C.
Podemos elegir un valor para x e y y calcular z. Por ejemplo, sea $x = 0, y = 0$.
$0 - 2(0) - z + 2 = 0 \implies -z + 2 = 0 \implies z = 2$. El punto $D(0, 0, 2)$ pertenece al plano π.
Comprobamos que es distinto de A(1,1,1), B(1,3,-3) y C(-3,-1,1). Sí lo es.

$$\boxed{\textbf{Un posible punto es } D(0,0,2) \textbf{ (cualquier punto del plano distinto de A, B, C es válido).}}$$

c) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Un punto P del eje OX tiene coordenadas $P(x_p, 0, 0)$. El volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P es:

$$V = \frac{1}{6}|\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AP})|$$

Calculamos $\vec{AP} = P - A = (x_p - 1, 0-1, 0-1) = (x_p - 1, -1, -1)$. Usamos los vectores $\vec{AB} = (0, 2, -4)$ y $\vec{AC} = (-4, -2, 0)$ de antes.

$$\det(\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}) = \begin{vmatrix} x_p - 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x_p - 1)(2(0) - (-4)(-2)) - (-1)(0(0) - (-4)(-4)) + (-1)(0(-2) - 2(-4))$$
$$= (x_p - 1)(0 - 8) + 1(0 - 16) - 1(0 + 8)$$
$$= -8(x_p - 1) - 16 - 8 = -8x_p + 8 - 16 - 8 = -8x_p - 16.$$

El volumen es $V = \frac{1}{6}|-8x_p - 16|$. Queremos que $V = 1$.

$$\frac{1}{6}|-8x_p - 16| = 1 \implies |-8x_p - 16| = 6$$

Esto nos da dos posibilidades: 1) $-8x_p - 16 = 6 \implies -8x_p = 22 \implies x_p = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4}$. Punto $P_1(-\frac{11}{4}, 0, 0)$. 2) $-8x_p - 16 = -6 \implies -8x_p = 10 \implies x_p = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4}$. Punto $P_2(-\frac{5}{4}, 0, 0)$.

$$\boxed{\textbf{Hay dos posibles puntos: } P_1(-\frac{11}{4}, 0, 0) \textbf{ y } P_2(-\frac{5}{4}, 0, 0).}$$

Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad y Estadística

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) **Se sabe que el 40% del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.**

b) **Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5.6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ.**

Solución:

a) **Se sabe que el 40% del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.**

Sea X el número de amigos seleccionados entre los 8.
Cada amigo puede ser seleccionado (éxito) con probabilidad $p = 0.40$ o no seleccionado (fracaso) con $q = 1 - p = 0.60$.
Asumiendo que la selección de cada amigo es independiente, X sigue una distribución Binomial: $X \sim B(n = 8, p = 0.40)$.
Se pide calcular la probabilidad de que al menos 2 sean seleccionados: $P(X \geq 2)$.
Es más fácil calcular el complementario:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

Usamos la fórmula de la probabilidad Binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} (0.40)^0 (0.60)^{8-0} = 1 \cdot 1 \cdot (0.60)^8 \approx 0.016796.$$

$$P(X = 1) = \binom{8}{1} (0.40)^1 (0.60)^{8-1} = 8 \cdot (0.40) \cdot (0.60)^7 = 3.2 \cdot (0.60)^7 \approx 3.2 \cdot 0.02799 = 0.089579.$$

Calculamos la probabilidad pedida:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \approx 1 - (0.016796 + 0.089579) = 1 - 0.106375 = 0.893625.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X \geq 2) \approx 0.8936}}$$

b) **Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5.6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ.**

Tenemos $X \sim N(\mu = 5.6, \sigma)$. Nos dan $P(X \leq 8.2) = 0.67$. Estandarizamos la variable X para usar la normal estándar $Z \sim N(0, 1)$: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

$$P(X \leq 8.2) = P\left(\frac{X - 5.6}{\sigma} \leq \frac{8.2 - 5.6}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{2.6}{\sigma}\right) = 0.67.$$

Buscamos en la tabla de la $N(0, 1)$ el valor z tal que $P(Z \leq z) = 0.67$. Mirando en el cuerpo de la tabla, el valor más cercano a 0.6700 es 0.6700, que corresponde a $z = 0.44$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Por lo tanto, debemos tener:

$$\frac{2.6}{\sigma} = 0.44$$

Despejamos σ:

$$\sigma = \frac{2.6}{0.44} = \frac{260}{44} = \frac{65}{11} \approx 5.91.$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma = \frac{65}{11} \approx 5.91}}$$

Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

Dadas las matrices: $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ **se pide:**

a) **Calcular para qué valores $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}}$ se verifica $\boldsymbol{A^2 - I = 2A}$.**
b) **Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.**
c) **Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $\boldsymbol{(AA^t)^2}$ donde $\boldsymbol{A^t}$ denota la matriz traspuesta de A.**

Solución:

a) **Calcular para qué valores $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}}$ se verifica $\boldsymbol{A^2 - I = 2A}$.**

Calculamos A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)^2+1 & (1-a)+(1+a) \\ (1-a)+(1+a) & 1+(1+a)^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-2a+a^2+1 & 1-a+1+a \\ 1-a+1+a & 1+1+2a+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2 \\ 2 & a^2+2a+2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $A^2 - I$:

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2 \\ 2 & a^2+2a+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2a+1 & 2 \\ 2 & a^2+2a+1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $2A$:

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix}.$$

Igualamos $A^2 - I = 2A$:

$$\begin{pmatrix} a^2-2a+1 & 2 \\ 2 & a^2+2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix}.$$

Igualamos elemento a elemento:
- $(1,1) : a^2-2a+1 = 2-2a \implies a^2-1=0 \implies a^2=1 \implies a=\pm 1.$
- $(1,2) : 2=2.$ (Se cumple siempre).
- $(2,1) : 2=2.$ (Se cumple siempre).
- $(2,2) : a^2+2a+1 = 2+2a \implies a^2-1=0 \implies a^2=1 \implies a=\pm 1.$

La igualdad se cumple si $a=1$ o $a=-1$.

$$\boxed{\textbf{La igualdad } \boldsymbol{A^2 - I = 2A} \textbf{ se verifica para } \boldsymbol{a = 1} \textbf{ y } \boldsymbol{a = -1}.}$$

b) **Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.**

A admite inversa si $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1-a)(1+a) - 1(1) = (1-a^2) - 1 = -a^2.$$

$|A| = 0 \iff -a^2 = 0 \iff a = 0$. Por lo tanto, A admite inversa para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Si $a \neq 0$, calculamos la inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t$.

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

$$(\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-a^2}\begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+a)/a^2 & 1/a^2 \\ 1/a^2 & -(1-a)/a^2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\textbf{A admite inversa si } \boldsymbol{a \neq 0}\textbf{. Para } \boldsymbol{a \neq 0, A^{-1} = \frac{1}{-a^2}\begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}}.}$$

c) **Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $\boldsymbol{(AA^t)^2}$ donde $\boldsymbol{A^t}$ denota la matriz traspuesta de A.**

Usamos las propiedades de los determinantes: $|XY| = |X||Y|$, $|X^t| = |X|$, $|X^k| = |X|^k$.

$$|(AA^t)^2| = |AA^t|^2 = (|A||A^t|)^2$$

Como $|A^t| = |A|$, tenemos:

$$= (|A||A|)^2 = (|A|^2)^2 = |A|^4.$$

Calculamos $|A|$ en el apartado b: $|A| = -a^2$. Por lo tanto:

$$|(AA^t)^2| = (-a^2)^4 = a^8.$$

$$\boxed{\boldsymbol{|(AA^t)^2| = a^8}}$$

Ejercicio 2. Opción B. Análisis

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10 - t)$.

a) **Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.**
b) **Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.**
c) **Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.**

Solución:

a) **Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.**

Tenemos $F'(t) = t^2(10 - t) = 10t^2 - t^3$. Para encontrar $F(t)$, integramos $F'(t)$:

$$F(t) = \int (10t^2 - t^3)dt = 10\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C.$$

Sabemos que inicialmente ($t = 0$) había 6 personas afectadas, es decir, $F(0) = 6$.

$$F(0) = 10\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + C = 6 \implies C = 6.$$

La función es:

$$F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6.$$

(Asumimos que $t \geq 0$).

$$\boxed{\boldsymbol{F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6}}$$

b) **Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.**

Para encontrar el máximo, usamos la primera derivada $F'(t)$ y buscamos los puntos críticos. $F'(t) = 10t^2 - t^3$. $F'(t) = 0 \implies t^2(10 - t) = 0$. Las soluciones son $t = 0$ y $t = 10$. Estudiamos el signo de $F'(t)$ para $t \geq 0$.

Intervalo	$(0, 10)$	$(10, +\infty)$
Signo $F'(t)$	$+$	$-$
Comportamiento$F(t)$	*Creciente* $\nearrow$	*Decreciente* $\searrow$

La tabla indica que hay un máximo relativo (y absoluto para $t \geq 0$) en $t = 10$. El número máximo de enfermos se alcanza a los 10 días. Calculamos el número máximo de enfermos, $F(10)$:

$$F(10) = \frac{10(10)^3}{3} - \frac{10^4}{4} + 6 = \frac{10000}{3} - \frac{10000}{4} + 6$$

$$F(10) = \frac{40000 - 30000}{12} + 6 = \frac{10000}{12} + 6 = \frac{2500}{3} + \frac{18}{3} = \frac{2518}{3}.$$

$F(10) = \frac{2518}{3} \approx 839.33$. Como el número de enfermos debe ser entero, el máximo es 839.

$$\boxed{\textbf{El máximo número de enfermos se alcanza a los } \boldsymbol{t = 10} \textbf{ días y es } \boldsymbol{F(10) = \frac{2518}{3} \approx 839} \textbf{ enfermos.}}$$

c) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Se asume que el brote dura hasta que el número de enfermos vuelve a ser cero (o el inicial, 6, dependiendo de la interpretación, pero 0 parece más lógico para "duración"). Buscamos $t > 0$ tal que $F(t) = 0$.

$$F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6 = 0$$

Multiplicamos por 12 para eliminar denominadores:

$$40t^3 - 3t^4 + 72 = 0 \implies 3t^4 - 40t^3 - 72 = 0.$$

Sea $G(t) = 3t^4 - 40t^3 - 72$. $G(t)$ es una función continua.
Sabemos que $F(t)$ crece hasta $t = 10$ ($F(10) > 0$) y luego decrece.
Calculamos $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty}(\frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6) = -\infty$.
Como $F(10) > 0$ y $F(t)$ tiende a $-\infty$ cuando $t \to \infty$, debe existir un valor $T > 10$ donde $F(T) = 0$.
Aplicamos el Teorema de Bolzano para encontrar un intervalo que contenga la raíz T.
$F(13) = 2269/3 > 0$.
Probamos un valor mayor, por ejemplo $t = 14$:
$F(14) = \frac{10(14^3)}{3} - \frac{14^4}{4} + 6 = \frac{10(2744)}{3} - \frac{38416}{4} + 6 = \frac{27440}{3} - 9604 + 6 \approx 9146.67 - 9598 < 0$.
Como $F(10) > 0$ y $F(14) < 0$, y $F(t)$ es continua, por el Teorema de Bolzano, existe al menos una raíz T en el intervalo $(13, 14)$.
Dado que $F'(t) < 0$ para $t > 10$, la función es estrictamente decreciente en $(13, \infty)$, por lo que la raíz es única.
El brote dura T días, donde $T \in (13, 14)$. El enunciado pide "cuántos días", lo que podría interpretarse como el valor entero más cercano o el valor exacto T. Sin métodos numéricos, sólo podemos acotar el intervalo.

$$\boxed{\textbf{El brote dura } \boldsymbol{T} \textbf{ días, donde } \boldsymbol{T} \textbf{ es la única raíz de } \boldsymbol{F(t) = 0} \textbf{ para } \boldsymbol{t > 0}, \textbf{ y } \boldsymbol{13 < T < 14}.}$$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

Dados el plano, $\pi \equiv 2x+3y-z=4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$, $s \equiv (x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,0,1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se pide:

a) **Calcular el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de π.**
b) **Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.**
c) **Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.**

Solución:

a) **Calcular el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de π.**

Sea $P'(x',y',z')$ el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto al plano $\pi \equiv 2x+3y-z=4$.
1. Hallamos la recta t perpendicular a π que pasa por P.
El vector director de t, $\vec{v}_t$, es el vector normal del plano π, $\vec{n}_\pi=(2,3,-1)$.
La recta t es: $(x,y,z)=(1,2,3)+\mu(2,3,-1)=(1+2\mu,2+3\mu,3-\mu)$.

2. Hallamos el punto M, intersección de la recta t y el plano π. Sustituimos las coordenadas de t en la ecuación de π:

$$2(1+2\mu)+3(2+3\mu)-(3-\mu)=4$$
$$2+4\mu+6+9\mu-3+\mu=4$$
$$14\mu+5=4 \implies 14\mu=-1 \implies \mu=-1/14.$$

El punto M es:

$$x_M=1+2(-1/14)=1-1/7=6/7$$
$$y_M=2+3(-1/14)=2-3/14=28/14-3/14=25/14$$
$$z_M=3-(-1/14)=3+1/14=42/14+1/14=43/14$$
$$M(6/7,25/14,43/14)$$

3. M es el punto medio del segmento PP'.

$$M=\frac{P+P'}{2} \implies P'=2M-P$$
$$x'=2(6/7)-1=12/7-7/7=5/7$$
$$y'=2(25/14)-2=25/7-14/7=11/7$$
$$z'=2(43/14)-3=43/7-21/7=22/7$$

El punto simétrico es $P'(\frac{5}{7},\frac{11}{7},\frac{22}{7})$.

$$\boxed{\textbf{El punto simétrico es } P'(\frac{5}{7},\frac{11}{7},\frac{22}{7})}$$

b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

1. Hallamos el punto de intersección I de r y s.
Recta r:
Sumando las ecuaciones $x+y-z=0$ y $x+y+z=2$, obtenemos $2x+2y=2 \implies x+y=1 \implies y=1-x$.
Restando las ecuaciones $(x+y+z)-(x+y-z)=2-0 \implies 2z=2 \implies z=1$.
Sustituyendo $z=1$ en la primera ecuación: $x+y-1=0 \implies y=1-x$.
Parametrización de r: $(x,y,z)=(\lambda,1-\lambda,1)$.
Punto $A(0,1,1)$, $\vec{v}_r=(1,-1,0)$.
Recta s: $(x,y,z)=(1+\lambda',2,3+\lambda')$. Punto $B(1,2,3)$, $\vec{v}_s=(1,0,1)$.

Igualamos las coordenadas paramétricas (usando μ para s para evitar confusión): $r:(\lambda,1-\lambda,1)$ $s:(1+\mu,2,3+\mu)$

$$\begin{cases}\lambda=1+\mu\\ 1-\lambda=2\\ 1=3+\mu\end{cases}$$

De la tercera ecuación: $\mu=1-3=-2$.
De la primera ecuación: $\lambda=1+(-2)=-1$.
Comprobamos en la segunda ecuación: $1-(-1)=1+1=2$. Se cumple.
El punto de intersección I se obtiene con $\lambda=-1$ en r o $\mu=-2$ en s.
Usando $\lambda=-1$: $I(-1,1-(-1),1)=I(-1,2,1)$.
Usando $\mu=-2$: $I(1+(-2),2,3+(-2))=I(-1,2,1)$.

2. Hallamos la recta t perpendicular a π que pasa por $I(-1,2,1)$.
El vector director de t es el normal de π: $\vec{v}_t=\vec{n}_\pi=(2,3,-1)$.
La ecuación paramétrica de t es:

$$t\equiv(x,y,z)=(-1,2,1)+\gamma(2,3,-1)=(-1+2\gamma,2+3\gamma,1-\gamma).$$

$$\boxed{\textbf{La recta pedida es } \boldsymbol{t}\equiv\begin{cases}\boldsymbol{x=-1+2\gamma}\\ \boldsymbol{y=2+3\gamma}\\ \boldsymbol{z=1-\gamma}\end{cases}\qquad(\gamma\in\mathbb{R}).}$$

c) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

El ángulo θ entre las rectas r y s es el ángulo agudo formado por sus vectores directores $\vec{v}_r=(1,-1,0)$ y $\vec{v}_s=(1,0,1)$. Usamos la fórmula del producto escalar:

$$\cos\theta=\frac{|\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s|}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|}$$

$\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s=(1)(1)+(-1)(0)+(0)(1)=1+0+0=1$. $|\vec{v}_r|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$. $|\vec{v}_s|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$.

$$\cos\theta=\frac{|1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

El ángulo es $\theta=\arccos(1/2)=60^\circ$.

$$\boxed{\textbf{El ángulo entre r y s es } \boldsymbol{60^\circ}.}$$

Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1.6%, mientras que para los de alta gama es del 0.9%. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) **Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.**
b) **Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.**

Solución:

Definimos los sucesos:

A = "Vehículo es de alta gama" $\implies P(A) = 1/3$.

B = "Vehículo es de baja gama" $\implies P(B) = 1 - P(A) = 1 - 1/3 = 2/3$.

D = "Vehículo es defectuoso".

Datos del enunciado:

$P(D|B) = 0.016$ (Prob. defecto si es baja gama).

$P(D|A) = 0.009$ (Prob. defecto si es alta gama).

a) **Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.**

Se pide calcular $P(D)$. Usamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)$$

$$P(D) = (0.009)\left(\frac{1}{3}\right) + (0.016)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$P(D) = \frac{0.009}{3} + \frac{0.032}{3} = \frac{0.041}{3}.$$

$$P(D) = \frac{41}{3000} \approx 0.01367$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(D) = \frac{0.041}{3} = \frac{41}{3000} \approx 0.0137}}$$

b) **Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.**

Se pide calcular $P(B|D)$. Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)}$$

Ya hemos calculado los valores necesarios: $P(D|B) = 0.016$, $P(B) = 2/3$, $P(D) = 0.041/3$.

$$P(B|D) = \frac{(0.016)(2/3)}{0.041/3} = \frac{0.016 \times 2}{0.041} = \frac{0.032}{0.041} = \frac{32}{41}.$$

Calculamos el valor numérico:

$$P(B|D) \approx 0.7805.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(B|D) = \frac{32}{41} \approx 0.7805}}$$